Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Матриці та дії над ними**

Мета заняття ознайомити студентів з означенням матриці, поняттями квадратної , прямокутної, діагональної, одиничної, нульової матриць, формувати вміння знаходити суму, різницю, добуток матриць та множити матрицю на число, транспонувати матрицю.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 20…23, [5], с. 234…241 [6], с. 44…47	10 хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

Означення 1. **Матрицею розміром *mxn* називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в *m* рядках та *n* стовпцях.**

Матриці позначають великими літерами, наприклад, A, B,C, та круглими дужками, а елементи матриць позначають відповідними малими літерами з двома індексами, наприклад, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}.

Перший індекс ***i*** *вказує номер рядка,* в якому знаходиться цей елемент, другий індекс ***j*** *вказує номер стовпця,* який містить цей елемент. Так, елемент C_{43} знаходиться на перетині четвертого рядка та третього стовпця матриці C.

Матриця розміру nx1 називається *матрицею-стовпцем* або вектором-стовпцем. *Матриця розміру 1xn* називається *матрицею-рядком* або вектором-рядком. *Матрицю називають квадратною порядку n, якщо кількість її рядків однакова з кількістю стовпців і дорівнює n.*

Приклад 1. Нехай задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 3\\ 3 & 4 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 7 & 8\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 9\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\\ 6\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix};\ K=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 7 & 6\\ 2 & 12 & 8\end{pmatrix}$$

Матриця A має розмір 3x4, матриця B розміру 2x3, матриця-стовпець C розміру 4x1, D - матриця рядок розміру 1x4, матриця K - квадратна порядку 3.

Елементи квадратної матриці A порядку n, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з лівого верхнього кута до правого нижнього кута, утворюють головну діагональ матриці.

Елементи квадратної матриці, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з правого верхнього кута до лівого нижнього кута, утворюють неголовну (побічну) діагональ матриці.

Наприклад, в матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n}\\ - & - & - & - & - & -\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn}\end{pmatrix}$$

елементами головної діагоналі будуть: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}, а елементами неголовної діагоналі будуть: a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, ..., a_{n1}.

Квадратна матриця зветься діагональною, якщо усі її елементи дорівнюють 0, крім елементів головної діагоналі.

Діагональна матриця, усі елементи якої дорівнюють одиниці, називається одиничною матрицею і позначається E або I.

Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ - діагональна матриця 4 порядку;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця порядку 3.

Матриці А та В називають **рівними,** якщо:

1. вони мають однаковий розмір;
2. їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = в_{ij}$ для усіх і та j.

Якщо в матриці А рядки записати стовпцями із збереженням їх нумерації, то одержана матриця зветься **транспонованою** і позначається A^T, а вказана операція перетворення матриці А називається *транспонуванням* матриці А.

Наприклад,

якщо $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, тоді $C^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Матриці широко використовуються не лише в різних навчальних дисциплінах, але й в практичній діяльності спеціалістів багатьох галузей, тому треба розуміти правила дій з матрицями і мати навички їх використання.

Найпростіші дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають множення матриць на число, їх алгебраїчну суму та множення матриць.

Добутком матриці А на число к називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам відповідних елементів матриці А та числа к:

$$кA = \begin{pmatrix} ка_{11} & ка_{12} & ка_{13} & ... & ка_{1n} \\ ка_{21} & ка_{22} & ка_{23} & ... & ка_{2n} \\ – & – & – & – & – \\ ка_{m1} & ка_{m2} & ка_{m3} & ... & ка_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру!!!

Алгебраїчною сумою матриць А та В однакового розміру *mxn* називається матриця С розміру *mxn*, елементи якої дорівнюють такої самої алгебраїчної суми елементів a_{ij} та $в_{ij}$ матриць А та В:

$$A \pm B = C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & ... & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{21} \pm b_{21} & ... & a_{2n} \pm b_{2n} \\ – & – & – & – \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & ... & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад,

якщо $A=\begin{pmatrix}15 & 20 & 25\\ 16 & 12 & 18\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 15\\ 9 & 8 & 13\end{pmatrix}$, тоді

$$2A-B=\begin{pmatrix}2\cdot15-7 & 2\cdot20-4 & 2\cdot25-15\\ 2\cdot16-9 & 2\cdot12-8 & 2\cdot18-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 36 & 35\\ 23 & 16 & 23\end{pmatrix}$$

Добуток A·B матриць A та B існує лише при виконанні умов узгодженості: кількість стовпців матриці А (першого множника) дорівнює кількості рядків матриці В (другого множника).!!!

Добутком A·B матриці А розміру m x n і матриці В розміру n x p називається матриця С розміру m x p, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці А на відповідні елементи j-го стовпця матриці В. Таким чином, кожен елемент матриці С знаходиться за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+\ a_{i2}\cdot b_{2j}+\ a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+\ a_{in}\cdot b_{nj} \quad (2)$$

Зауваження 1. Взагалі добуток матриць не має властивості комутативності, тобто AB≠BA. Якщо добуток двох матриць не залежить від порядку множників, тобто AB = BA, тоді кажуть, що ці матриці комутують.

Наприклад, якщо А - квадратна матриця порядку n, Е - одинична матриця порядку n, тоді AE = EA = A.

Приклад 2 Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}4 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Знайти існуючі добутки цих матриць.

Розв'язання.

У даному випадку згідно умови узгодженості існування добутку матриць, існують лише наступні добутки матриць: AX (кількість стовпців першого множника - 4 дорівнює кількості рядків другого множника); BC, CB, BA, CA.

Знайдемо вказані добутки матриць, використовуючи означення добутку матриць.

$$AX=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{34}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4\end{pmatrix}$$

розміри: 3x4 4x1 3x1

$$BC=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&4\\3&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot4+2\cdot1+1\cdot3; & 3\cdot5+2\cdot2+1\cdot2; & 3\cdot6+2\cdot4+1\cdot1\\1\cdot4+3\cdot1+2\cdot3; & 1\cdot5+3\cdot2+2\cdot2; & 1\cdot6+3\cdot4+2\cdot1\\(-2)\cdot4+1\cdot1+2\cdot3; & (-2)\cdot5+1\cdot2+2\cdot2; & (-2)\cdot6+1\cdot4+2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17&21&27\\13&15&20\\-1&-4&-6\end{pmatrix}\quad(3)$$

$$CB=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&4\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+5-12; & 8+15+6; & 4+10+12\\3+2-8; & 2+6+4; & 1+4+8\\9+2-2; & 6+6+1 & 3+4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&29&26\\-3&12&13\\9&13&9\end{pmatrix}(4)$$

Відмітимо, що з рівностей (3) та (4) випливає, що матриці В і С не комутують.

$$BA=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3a_{11}+2a_{21}+a_{31}; & 3a_{12}+2a_{22}+a_{32}; & 3a_{13}+2a_{23}+a_{33}; & 3a_{14}+2a_{24}+a_{34};\\a_{11}+3a_{21}+2a_{31}; & a_{12}+3a_{22}+2a_{32}; & a_{13}+3a_{23}+2a_{33}; & a_{14}+3a_{24}+2a_{34};\\2a_{11}+a_{21}+2a_{31}; & -2a_{12}+a_{22}+2a_{32}; & -2a_{13}+a_{23}+2a_{33}; & -2a_{14}+a_{24}+2a_{34};\end{pmatrix}$$

Аналогічно можна знайти і добуток **СА.**

Зауваження 2. Ділення матриць $\frac{A}{B}$ розглядають як добуток АхВ$^{-1}$, де В$^{-1}$ - матриця, обернена до матриці В. Визначення та способи знаходження матриці В$^{-1}$ розглянемо пізніше, після введення нових необхідних понять.

Зауваження 3. У випадках великого розміру матриць та їх елементів для дій з матрицями використовують комп'ютерну техніку.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Що називається матрицею? Назвіть види матриць.
2. Які дії можна виконувати із матрицями?
3. Як помножити матрицю на число?
4. Які матриці можна додавати (віднімати)?
5. Назвіть правило множення двох матриць.
6. Як обчислюється розмірність матриці, отриманої у випадку множення двох матриць?

Домашнє завдання:

[3], с. 20…23,
[5], с. 234…241
[6], с. 44…47

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема	**Визначник матриці. Властивості визначника матриці.**
Мета заняття	ознайомити студентів з поняттям визначника матриці, мінором та алгебраїчним доповненням, правилом обчислення визначника 2-го, 3-го та 4-го порядків, формувати вміння використовувати властивості визначників при розв'язуванні прикладів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 6…12, [5], с. 226…232 [6], с. 18…25	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

Означення 1. ***Визначником n-го порядку*** **квадратної числової матриці А порядку n називають число, яке знаходиться з елементів матриці А за певним правилом і позначають |А| або Δ.**

Правило обчислення визначника 2 порядку:

Для заходження визначника другого порядку треба від добутку елементів головної діагоналі матриці відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Математично це правило можна записати у вигляді формули:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1)$$

Наприклад,

$$а) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11;$$

$$б) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-9) \cdot 3 = 10 + 27 = 37.$$

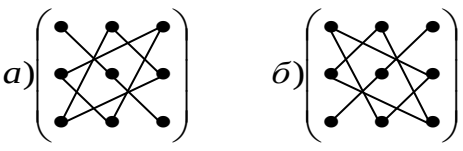
Правило обчислення визначника 3 порядку:

Визначник 3 порядку знаходять за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad (2)$$

яку можна сформулювати за правилом Саріуса.

Перших три доданки є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (див. схему а) мал.1). Три останні доданки в правій частині (7) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників з основами паралельними неголовній діагоналі (мал. 1 б)).



Мал. 1

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Розв'язання. За правилом Саріуса згідно формули (2) одержимо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot(-3)\cdot(-1) - (-1)\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 3 =$$

$$= 36 + 4 + 12 + 12 - 16 + 9 = 73 - 16 = 57$$

Для обчислення визначників порядку n > 3 використовують алгебраїчні доповнення.

Означення 2. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1) порядку, який одержуємо з визначника |A| шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Означення 3. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком (+), якщо сума індексів *(i+j)* - парна, та зі знаком (-), якщо (i+j) - не парна, тобто

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \quad (3)$$

Приклад 4. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{32} та a_{13} визначника $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів a_{13} та a_{32} позначимо A_{13} та A_{32}, відповідно. Згідно з означенням 3 маємо:

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$; $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

Мінори M_{13} та M_{32} знайдемо згідно означення 2

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Підставимо значення мінорів у рівності (3), одержимо шукані алгебраїчні доповнення $A_{13} = 16$; $A_{32} = -1$

Правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначник n порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

У випадку використання i-го рядка це правило математично виглядає так

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{ij} A_{ij} \; + .. + a_{in} \cdot A_{in} \quad (4)$$

Рівність (4) називають *розкладом визначника за елементами і-го рядка.*

Зауваження. Обчислення визначника **n** порядку зводиться до обчислення **n** визначників **(n-1)** порядку. Для скорочення обчислень визначник доцільно розкладати за елементами рядка або стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. До нулів не треба знаходити алгебраїчних доповнень тому, що добуток 0 на його алгебраїчне доповнення дорівнює нулю. Властивості визначника дозволяють робити еквівалентні перетворення визначника і одержувати якомога більше нулів в деякому рядку або стовпці.

Властивості визначників.

1 *Визначник при транспонуванні не змінюється:* $|A|=|A^m|$.

Наслідок. Рядки та стовпці визначника мають однакові властивості.

2 *Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.*

3 *Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює 0.*

4 *Якщо усі елементи одного рядка (стовпця) визначника помножити на однакове число* ***к****, то визначник зросте в* ***к*** *разів.*

Наслідок 1. Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

Наслідок 2. Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5 *Якщо елементи двох будь-яких рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

6 *Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, помножені на однакове число, то визначник не зміниться.*

Приклад 5. Обчислити визначник 4-го порядку.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

Якщо цей визначник обчислювати шляхом його розкладу за елементами 1-го стовпця або 2-го рядка (вони містять один нуль), то треба буде знайти та обчислити три алгебраїчних доповнення – визначники третього порядку.

Перетворимо цей визначник так, щоб одержати якомога більше нулів у другому рядку, бо там вже є один нуль і є одиниця, яка спрощує перетворення. Елементи другого стовпця помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів третього стовпця**,** потім елементи другого стовпця помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця. Одержимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 13 \\ 5 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Тепер визначник доцільно розкласти за елементами другого рядка

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 \\ -3 & -3 & 13 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 13 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Останню рівність одержали шляхом виносу за знак визначника загального множника (-3) елементів другого стовпця.

Використовуючи правило обчислення визначника третього порядку, одержимо

|A| = -3 (7 + 130 - 33 - 55 + 42 - 13) = -3(179 - 101**)** = (-3)·78 = -234

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Що називається визначником матриці?
2. Що таке мінор? Алгебраїчне доповнення?
3. Як обчислити визначник 2-го порядку?
4. За яким правилом обчислюється визначник 3-го порядку?
5. Назвіть властивості визначників.
6. Як обчислюється визначник 4-го порядку?

Домашнє завдання:

[3], с. 6…12,

[5], с. 226…232

[6], с. 18…25

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Обернена матриця.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям оберненої матриці, правилом знаходження оберненої матриці, формувати вміння використовувати отримані раніше знання для розв'язування прикладів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 24…25, [5], с. 241…245 [2], с. 6	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

Навчальні матеріали лекції

Означення 1. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці А, якщо виконуються рівності

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E} \quad (1)$$

Ці рівності означають, що матриці А та A^{-1} комутують і їх добуток є одиничною матрицею.

Не кожна матриця має обернену матрицю.

Матриця А має обернену матрицю A^{-1} лише при виконанні умов:
1. Матриця А - квадратна;
2. Визначник |А| матриці А не дорівнює нулю.

Якщо визначник матриці А не дорівнює нулю, то така матриця називається *неособливою*. Для будь-якої неособливої матриці існує обернена.

Щоб відшукати матрицю, обернену до матриці А, потрібно виконати такі дії:
1. Знайти визначник матриці А;
2. Скласти матрицю $\overline{A}$ з алгебраїчних доповнень матриці А;
3. Транспонувати матрицю $\overline{A}$; ця матриця називається *приєднаною* або *союзною* і позначається $\widetilde{A}$;
4. Поділити приєднану матрицю на визначник даної матриці. Отже, $A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\Delta}$

Також можна використати формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Матричні рівняння.

Нехай потрібно знайти матрицю Х, що задовольняє матричне рівняння ХА=В, де А – не вироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо:

$(XA)A^{-1}=BA^{-1}$, $X(AA^{-1})=BA^{-1}$, $XE=BA^{-1}$, або $\mathbf{X=BA^{-1}}$

Розв'язок матричного рівняння АХ=В знаходять за формулою $\mathbf{X=A^{-1}B}$.

1. Знайти обернені матриці до матриць

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 15\\ -1 & -5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця С- не квадратна, тому не існує оберненої до неї матриці.

Матриця В - квадратна, але її визначник |B| = -3·5 -(-1)·15 = -15 + 15 = 0, тому матриця В також не має оберненої матриці.

Матриця А- квадратна, її визначник за правилом Саріуса

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 7\cdot 8+4\cdot 11\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 7\cdot 1+3\cdot 4\cdot 8-1\cdot 11\cdot 5=$$

$$=280+44-6-14+96-55=420-75=345$$

Отже, матриця A^{-1} існує. Будемо шукати матрицю A^{-1} за формулою (2).

Спочатку знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці А.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}7 & -11\\ -1 & 8\end{vmatrix}=45;\quad A_{21}=30;\quad A_{31}=30$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -11\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-35;\quad A_{22}=38;\quad A_{31}=61$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-10;\quad A_{23}=1;\quad A_{33}=47$$

Відмітимо, що алгебраїчні доповнення до елементів і-го рядка ми одержали в і-тому стовпці, що спрощує їх підстановку до формули (2). Одержали обернену матрицю вигляду:

$$A^{-1}=\frac{1}{345}\begin{pmatrix}45 & 30 & 30\\ -35 & 38 & 61\\ -10 & 1 & 47\end{pmatrix}$$

Зауваження 1. Перевірку можна здійснити так: якщо добуток A^{-1} A=E, то матриця A^{-1} знайдена вірно.

Зауваження 2. Якщо матриця А квадратна другого $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, визначник якої |A|≠0, то обернену до неї матрицю A^{-1} знаходять за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}\qquad (3)$$

тобто елементи головної діагоналі матриці А треба поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (-1) і одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|A|}$.

2. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник

$$|A|=\begin{vmatrix}8 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=24-8=16\neq 0,$$

тому для знаходження оберненої матриці можна застосувати формулу (3) і одержати $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння X·A·B=C, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ $C = (1 \quad -2)$.

Розв'язання. Послідовно дістаємо $X \cdot A \cdot B = C$, $X \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A \cdot E = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$, $X \cdot E = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$, $X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1}:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, $A_{11} = 1$, $A_{21} = -2$, $A_{12} = -3$, $A_{22} = 2$.

$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $B_{11} = -7$, $B_{21} = -4$, $B_{12} = -2$, $B_{22} = -1$.

$B^{-1} = -\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = (1 \quad -2)\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{4}(1 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \quad 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{4}(3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \quad 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2) = -\frac{1}{4}(-3 \quad -2) = \left(\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}\right)$.

Зазначимо, що матрицю X можна відшукувати також за формулою $X = C(AB)^{-1}$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Яка матриця називається оберненою?
2. Для яких матриць існує обернена?
3. Назвіть правило знаходження оберненої матриці.

Домашнє завдання: [3], с. 24…25,
[5], с. 241…245
[2], с. 6

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Крамера.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям системи n лінійних рівнянь з n невідомими, сумісної та несумісної матриці, формувати вміння використовувати формули Крамера для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 40…42, [5], с. 250…252 [1], с. 21	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ - коефіцієнти при невідомих; $в_1, в_2, \dots, в_n$ - вільні члени.

Коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ утворюють матрицю, визначник якої назвемо *визначником системи* і позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Розв'язком системи (1) називається сукупність значень невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які при підстановці їх у (1) перетворюють кожне з рівнянь у рівність.

Якщо система лінійних рівнянь (СЛР) має хоча б один розв'язок, то вона називається *сумісною*, у протилежному разі – *несумісною*. Якщо розв'язок системи єдиний, то СЛР називається *визначеною*. У разі, коли розв'язок сумісної системи не єдиний, систему рівнянь називають *невизначеною*.

Розв'язати систему (1) можна, користуючись правилом Крамера. Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, визначник якої не дорівнює нулю, завжди сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться так: значення кожного із невідомих дорівнює дробові, знаменником якого є визначник системи, а чисельник є також визначник, який отримуємо з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів при шуканій змінній стовпцем вільних членів.

Таким чином, розв'язок системи (1) знаходять за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots\dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ і $B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & в_n \end{array}\right)$

називають *основною* та *розширеною* матрицями системи (1) відповідно.

Зауваження 1. Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$ (j=$\overline{1,n}$), то система лінійних рівнянь має безліч розв'язків.

Зауваження 2. Якщо $\Delta = 0$ і хоч один із визначників Δ_j (j=$\overline{1,n}$) не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь не має розв'язків.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

Користуючись методом Крамера, розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 - 9 + 1 - 24 + 6 = -41;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 24 - 2 - 3 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 72 - 3 - 6 + 16 = 82.$$

Значить, за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$ - єдиний розв'язок системи.

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання. Основна матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Використовуючи властивості визначників, обчислюємо визначник основної матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 + 0 - (2 + 0 + 0)$$

$$= -11 \neq 0$$

Використаємо тепер формули Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Зауваження. Визначник Δ_3 можна не обчислювати, оскільки, знаючи x_1 та x_2, невідоме x_3 можна визначити з будь-якого рівняння системи після підстановки в нього значень x_1 та x_2.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Як виглядає система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими?
2. Що таке визначник системи?
3. Яка матриця називається сумісною (несумісною)?
4. Коли СЛР визначена?
5. За якими формулами знаходять розв’язок СЛР?

Домашнє завдання: [3], с. 40…42,
[5], с. 250…252
[1], с.21

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гауса.**

Мета заняття ознайомити студентів з методом Гауса розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими, формувати вміння використовувати розширену матрицю для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 43…44, [5], с. 252…254	10 хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

Навчальні матеріали лекції

При розв'язуванні системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими за правилом Крамера потрібно обчислювати (*n+1*) визначники *n-го* порядку. Тому при *n≥4* знаходження визначників призводить до громіздких обчислень, а значить, користуватись формулами Крамера стає нераціонально.

Серед інших методів розв'язування системи лінійних рівнянь розглянемо метод Гаусса, який ще називається *методом послідовного виключення невідомих.* Він полягає в тому, що при виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього і т.д., система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \qquad (1)$$

зводиться до системи рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + в_{12}x_2 + в_{13}x_3 + \cdots + в_{1n}x_n = c_1 \\ x_2 + в_{23}x_3 + \cdots + в_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + в_{(n-1)n}x_n = c_{n-1} \\ x_n = c_n \end{cases} \qquad (2)$$

Таке перетворення системи (1) до системи (2) називається прямим ходом методу Гаусса. Обернений хід методу Гаусса полягає в тому, що підставивши знайдене з останнього рівняння x_n у передостаннє, одержимо значення x_{n-1} і т.д.; з першого рівняння знаходимо значення x_1.

Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих, і стовпця з вільних членів, який для зручності виділимо вертикальною лінією. Таку матрицю $\widetilde{A}$ називають розширеною матрицею системи, тобто

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & в_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & в_n \end{array}\right)$$

З допомогою елементарних перетворень її зводять до трапецоїдального вигляду.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Розв'язання. Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при невідомому x_1 дорівнює одиниці. Для цього ліву і праву частини можна поділити на 2. Однак у даному прикладі краще поміняти місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Виключимо невідому x_1 у другому та третьому рівняннях системи. Для цього перше рівняння помножимо на -2 і додамо до другого рівняння, а потім помножимо на -3 і додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \\ -6x_2 - x_3 = -13 \end{cases}$$

Для виключення невідомої x_2 у третьому рівнянні додамо до нього друге, помножене на 6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \\ -31x_3 = -31 \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо$x_3 = (-31)/(-31) = 1$. Підставивши значення x_3=1 у друге рівняння, одержимо

$$x_2 = -3 + 5x_3 = -3 + 5 = 2$$

Із першого рівняння $x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 2 - 1 = -1$

Відповідь: розв'язком вихідної системи є числа $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

2. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання. Заданій системі лінійних рівнянь відповідає розширена матриця

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right).$$

Зведемо її до трапецоїдального вигляду з допомогою елементарних перетворень:

1. Поміняємо місцями перший та другий рядки.

2. Додамо до елементів другого, третього і четвертого рядків елементи першого рядка, помножені, відповідно, на -2, -2, -1.

3. Додамо відповідні елементи другого і третього рядків.

4. Поділимо всі елементи четвертого рядка на -2 і поміняємо місцями з третім рядком.

5. Додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи третього рядка, помножені на 6.

6. Поділимо всі елементи четвертого рядка на -7.

Розглянуті етапи зобразимо у вигляді схеми:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&-6&-1&-5\end{array}\right)\overset{(5)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-7&7\end{array}\right)\overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&1\end{array}\right)$$

Останній розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

розв'язок якої буде розв'язком вихідної системи. Оскільки $x_4 = -1$, то з третього рівняння $x_3 = 2 + x_4 = 2 + (-1) = 1$

Підставивши знайдені значення $x_3 = 1,\ x_4 = -1$ у друге рівняння, знайдемо

$$x_2 = -x_3 - x_4 = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Із першого рівняння одержимо

$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 0 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Розв'язком системи будуть такі числа: $x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1.$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Як виглядає система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими?
2. Як звести розширену матрицю до трапецоїдального вигляду?
3. Яка матриця називається розширеною?
4. Як називається метод Гауса?
5. За якими формулами знаходять розв'язок СЛР?

Домашнє завдання: [3], с. 43…44,
[5], с. 252…254

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Координати вектора. Дії над векторами, заданими координатами.**

Мета заняття повторити, узагальнити й систематизувати отримані раніше знання про вектор та дії над векторами, заданими координатами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 59…64 [1], с. 32 [6], с. 123	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм чисельним значенням, а й напрямом (швидкість, прискорення, сила та ін.).

Геометрично вектор являє собою *напрямлений відрізок* і позначається $\overline{a}$, або $\overline{AB}$, де точка А – початок вектора, а В – його кінець.

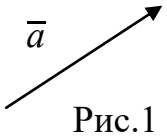
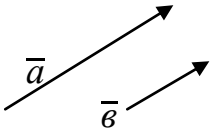


Рис.1

Відстань між початком вектора і його кінцем називають *довжиною* (або *модулем*) вектора і позначають $|\overline{a}|$, або $\left|\overline{AB}\right|$.

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих, називають *колінеарними.*



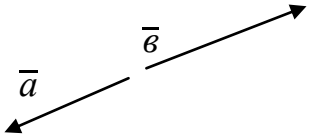


Рис.2

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ *рівні*, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і однакові напрями.

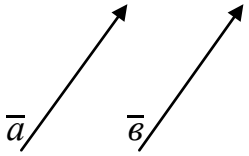


Рис.3

Два вектори називають протилежними, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і протилежні напрями.

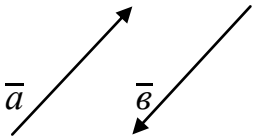


Рис.4

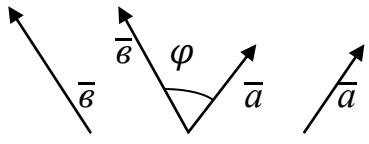
Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором*. Напрям його не визначений.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним вектором*.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, називають ортом вектора $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}_0$.

Вектори можна вільно переміщувати по площині (у просторі). Тому в аналітичній геометрії їх називають *вільними*.

Кутом між векторами $\overline{a}$ *і* $\overline{в}$, зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор $\overline{a}$ навколо спільного початку, щоб він збігся з вектором $\overline{в}$.



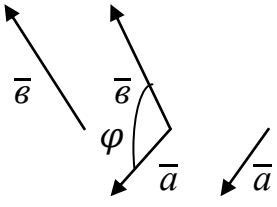


Рис.5

Три вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Зокрема, три вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з них – нуль-вектор.

Лінійні операції над векторами.

До лінійних операцій над векторами належать:
1) додавання (віднімання) векторів;
2) множення вектора на число (скаляр).

Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{в}$ називають вектор $\overline{a}+\overline{в}$, який сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{в}$ за умови, що вектор $\overline{в}$ прикладений до кінця вектора $\overline{a}$.

правило трикутника

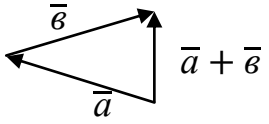
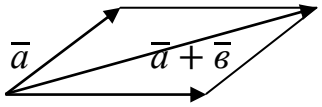


Рис.6

Суму двох векторів можна будувати також за *правилом паралелограма*.



в Рис.7

Віднімання векторів визначається як дія, обернена додаванню.

Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{в}$ називають вектор $\overline{a}-\overline{в}$, який у сумі з вектором $\overline{в}$ складає вектор $\overline{a}$, або, іншими словами, це вектор, що сполучає кінець вектора $\overline{в}$ з кінцем вектора $\overline{a}$ за умови, що $\overline{a}$ і $\overline{в}$ прикладені до спільного початку.

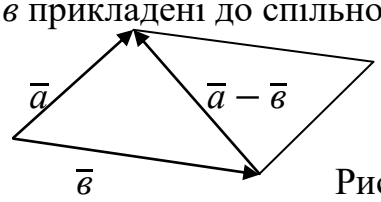
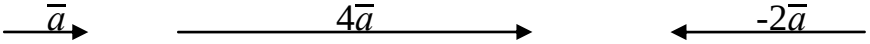


Рис.8

Добутком вектора $\overline{a}$ на скаляр λ називають вектор $\lambda\overline{a}$ такий, що $|\lambda\overline{a}|=|\lambda||\overline{a}|$ і напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$, або протилежний до напряму вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$. Так на рис.9 зображено вектори $\overline{a}$, $4\overline{a}$, $-2\overline{a}$.

Рис.9 

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\overline{в}=\lambda\overline{a}$, і навпаки, якщо $\overline{в}=\lambda\overline{a}$, то $\overline{a}$ і $\overline{в}$ колінеарні.

Сформулюємо властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\overline{a}+\overline{в}=\overline{в}+\overline{a}$.
2. $(\overline{a}+\overline{в})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{в}+\overline{c})$.
3. $\lambda(\overline{a}+\overline{в})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{в}$.
4. $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.
5. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
6. $\overline{a}(\lambda+\mu)=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$.
7. $\lambda(\mu\overline{a})=\lambda\mu\overline{a}$.

Проекція вектора на вісь.

Віссю називають напрямлену пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю довжини.

Проекцією точки А на вісь l називають основу перпендикуляра AA_1 (точка A_1), опущеного з точки А на вісь l (рис.10).

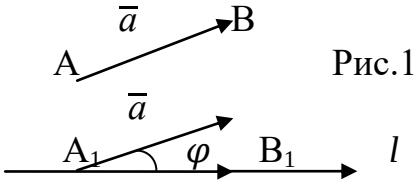


Рис.10

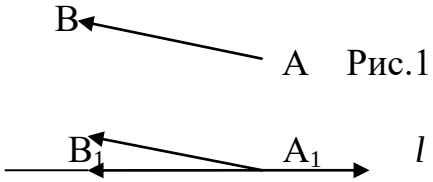


Рис.11

Нехай задано вісь l і вектор $\overline{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь l відповідно початку А і кінця В вектора $\overline{AB}$ і розглянемо вектор $\overline{a} = \overline{A_1B_1}$.

Проекцією вектора $\overline{a}$ *на вісь* l називають додатне число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вісь l і вектор $\overline{A_1B_1}$ однаково напрямлені (рис.10), і від'ємне число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вісь l і вектор $\overline{A_1B_1}$ протилежно напрямлені (рис.11).

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь l позначають так: $np_l\,\overline{a}$ (або $\overline{a}_l$).

Кутом між вектором $\overline{a}$ *і віссю* l називають менший з кутів, на який треба повернути вектор $\overline{a}$ або вісь l, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю. Цей кут міститься у межах від 0 до π.

Проекцію вектора $\overline{a}$ на вісь l обчислюють за формулою

$$np_l\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$$

де φ - кут між напрямом осі l і напрямом вектора $\overline{a}$.

При цьому $np_l\,\overline{a} > 0$, якщо кут φ- гострий, $np_l\,\overline{a} < 0$, якщо кут φ- тупий, $np_l\,\overline{a} = 0$, якщо $\varphi = 90^0$.

Сформулюємо деякі *властивості проекцій*.

1. Проекція суми кількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто

$$np_l\,(\overline{a_1} + \overline{a_2} + \cdots + \overline{a_n}) = np_l\,\overline{a_1} + np_l\,\overline{a_2} + \cdots + np_l\,\overline{a_n}.$$

2. При множенні вектора $\overline{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:

$$np_l\,\lambda\overline{a} = \lambda np_l\,\overline{a}.$$

Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис.

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити вирази вигляду

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \cdots + x_n\overline{a}_n,$$

Які називають *лінійними комбінаціями векторів* $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,…, $\overline{a}_n$; числа x_1, x_2,…, x_n - коефіцієнти.

Вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,…, $\overline{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа c_1, c_2,…, c_n не всі рівні нулю, що лінійна комбінація

$$c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + \cdots + c_n\overline{a}_n = 0,$$

і *лінійно незалежними*, якщо ця рівність виконується лише за умови, коли всі числа c_1, c_2,…, c_n рівні нулю.

Сукупність лінійно незалежних векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,…, $\overline{a}_n$ називають *базисом* простору R^n, якщо для кожного вектора з R^n існують такі дійсні числа x_1, x_2,…, x_n, що виконується рівність

$$\overline{в} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \cdots + x_n\overline{a}_n.$$

Цю рівність називають розкладом вектора $\overline{в}$ у базисі $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,…, $\overline{a}_n$.

Базисом на прямій *називають довільний ненульовий вектор на цій прямій.*

Якщо вектор $\overline{a}$ - базис, то існує єдиний розклад вектора $\overline{в}$: $\overline{в} = \lambda\overline{a}$, де λ - координата вектора $\overline{в}$ за базисом $\overline{a}$.

Базисом на площині *називають довільну упорядковану пару неколінеарних векторів.*

Базисом у просторі *називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів.*

Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{в}$ - базис на площині і $\overline{c}$ - довільний ненульовий вектор площини, то існують сталі α та β такі, що $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{в}$ (рис.12)

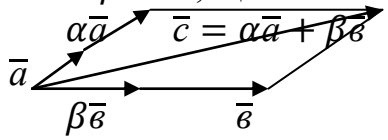


Рис.12

Коефіцієнти α , β називають *координатами вектора* $\overline{c}$ в даному базисі.

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{в}$ і $\overline{c}$ - базис у просторі і вектор $\overline{d}$ розкладений за базисом, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{\text{a}} + \beta\overline{\text{в}} + \gamma\overline{\text{c}}$ то числа α, β, γ називають координатами вектора $\overline{d}$ в даному базисі.

Таким чином, базис у просторі дає змогу кожний вектор одночасно зіставити з упорядкованою трійкою чисел (координатами цього вектора) і, навпаки, кожну упорядковану трійку чисел α, β, γ за допомогою базису можна зіставити з єдиним вектором

$$\overline{d} = \alpha\overline{\text{a}} + \beta\overline{\text{в}} + \gamma\overline{\text{c}}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Що таке вектор?
2. Які вектори називаються колінеарними?
3. Які вектори називаються компланарними?
4. Назвіть лінійні операції над векторами.
5. Що таке проекція вектора на вісь?
6. Дайте означення базису на площині , на прямій і у просторі.

Домашнє завдання:

[3], с. 59…64

[1], с.32

[6], с.123

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Загальне рівняння прямої.**

Мета заняття ознайомити студентів елементами аналітичної геометрії на площині, формувати вміння розрізняти види рівнянь та використовувати формули для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 96…102 [5], с. 194…202 [2], с.32, [6], с.140	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

6. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 3. – 275 с

Навчальні матеріали лекції

Виведемо рівняння прямої L , яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n} = \{A; B\}$ (рис.1а). Вектор $\bar{n}$ називають *нормальним* вектором прямої. Візьмемо на прямій L довільну точку М(х;у) й утворимо вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$. Оскільки за умовою шукана пряма L і нормаль $\bar{n}$ взаємно перпендикулярні, то довільний вектор прямої $\overline{M_0M}$ і вектор $\bar{n}$ також перпендикулярні. За умовою перпендикулярності двох векторів скалярний добуток $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, або в координатній формі (1)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Рівняння (1) називається рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\bar{n} = \{A; B\}$. Розкривши у рівнянні дужки і позначивши $-Ax_1 - By_1 = C$ дістанемо рівняння прямої L ,яке називається *загальним рівнянням прямої* на площині (2)

$$Ax + By + C = 0$$

Розглянемо окремі випадки розміщення прямої залежно від значень коефіцієнтів A,B,C

Умова	**Рівняння прямої**	**Положення прямої**
A=0, $B \neq 0$	*By+C=0*	Паралельна осі *Ox*
B=0, $A \neq 0$	*Ax+C=0*	Паралельна осі *Oy*
C=0	*Ax+By=0*	Проходить через початок координат
A=0,C=0, $B \neq 0$	*y=0*	Проходить через вісь *Ox*
B=0,C=0, $A \neq 0$	*x=0*	Проходить через вісь*Oy*

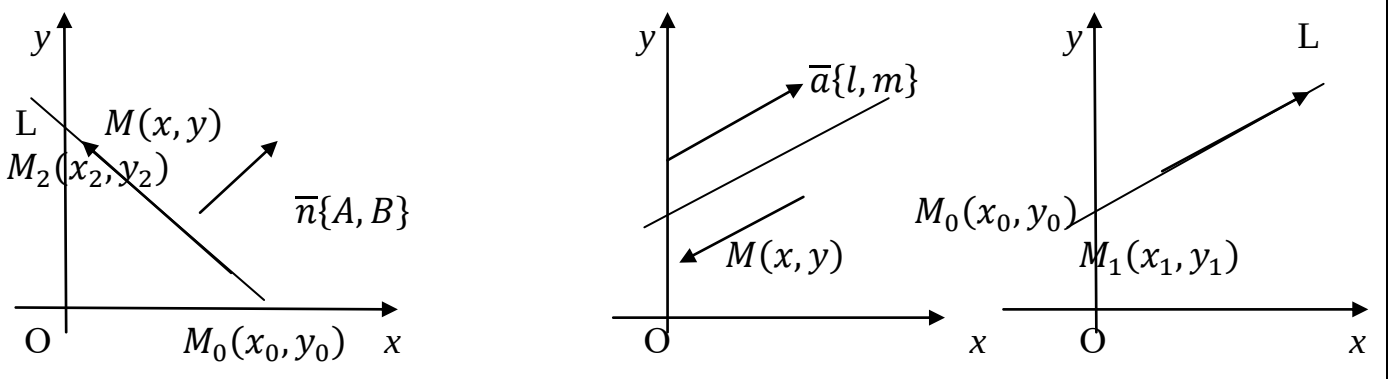


Рис. 1а.б.в

Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\bar{a} = \{l; m\}$(рис.1б), який називається напрямним вектором прямої L . Візьмемо на прямій довільну точку М(х;у). Тоді вектори $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ і $\bar{a} = \{l; m\}$ колінеарні, отже, їхні координати пропорційні (3)

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Рівняння (3) називається канонічним рівнянням прямої.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$(рис.1в) . Вибравши вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ за напрямний вектор прямої L і скориставшись рівнянням (3), дістанемо рівняння , яке є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки (4)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Векторне параметричне рівняння прямої

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до напрямного вектора $\bar{a} = \{l; m\}$ (рис.2). Візьмемо на прямій довільну точку М(х;у) і розглянемо радіуси-вектори $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. Вектори $\overline{M_0M} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ і $\bar{a}$ колінеарні, тому $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t \cdot \bar{a}$,

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \bar{a}$$

Рівняння (5) називається *векторним параметричним рівнянням* прямої. Змінна *t*, яка може набувати будь-які значення, називається параметром.

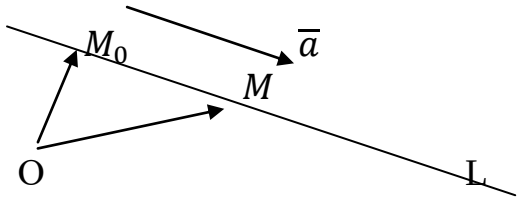


Рис.2

Параметричні рівняння прямої

Позначимо у формулі (3) відношення через *t*, тобто

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$$

Звідси дістанемо

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \epsilon R$$

Ці рівняння прямої називаються *параметричними* .

Рівняння прямої у відрізках на осях.

Нехай пряма L проходить через дві точки $A(a;0)$ i $B(0;b)$, тобто відсікає на осях координат відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$ (рис.3а). Підставивши координати цих точок в рівняння (4) ,дістанемо рівняння (6), яке називається *рівнянням прямої у відрізках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма L проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис.3б), то число $k = tg\alpha$ називається кутовим коефіцієнтом прямої. Обравши довільну точку М(х;у) на прямій, дістанемо з трикутника M_0MK

$$k = tg\alpha = \frac{MK}{M_0K} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

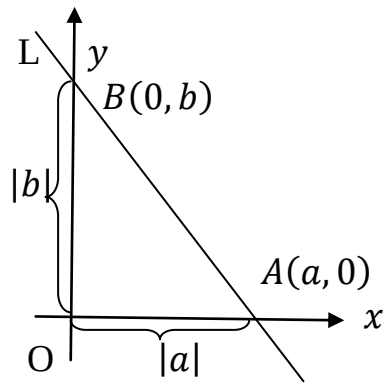
Звідки

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Це рівняння прямої L , яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k Якщо за точку M_0 візьмемо точку $B(0;b)$, то дістанемо рівняння (7)

$$y = kx + b$$

яке називається рівнянням прямим з кутовим коефіцієнтом.



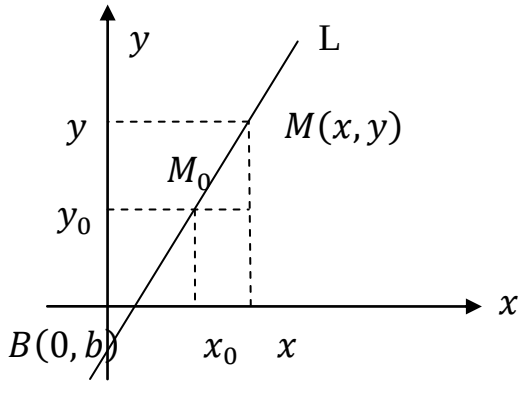


Рис.3а.б

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дати означення нормального вектора.
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Назвіть окремі випадки розміщення прямої залежно від коефіцієнтів A,B,C.
4. Як виглядає канонічне рівняння прямої?

5. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через дві точки.
6. Як виглядає рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

Домашнє завдання:
[3], с. 96…102
[5], с. 194…202
[2], с.32, [6], с.140

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Границя функції та її обчислення.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям границі функції, правилом обчислення границь функції, формувати вміння використовувати першу і другу важливі границі для розв'язування прикладів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 175…177 [1] с.149 [6] с.205	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с

Навчальні матеріали лекції

У всіх означеннях будемо припускати що точка x_0 є граничною точкою множини X. (області визначення функції f(x), тобто така , що в довільному околі якої є точки множини X, відмінні від x_0.

Означення (по Коші). *Число a називається границею функції f(x) в точці x_0, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\partial(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \partial(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.*

Твердження про те, що a - границя функції f(x) у точці x_0 можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Наведено інше означення, еквівалентне попередньому.

Означення (за Гейне). *Число A називається границею функції f(x) в точці x_0, якщо для будь якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) усі елементи якої відмінні від x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A.*

Зауваження. Знаходження границі функції безпосередньо на підставі означення досить складне завдання. На практиці користуються теоремами, які випливають з означення границі функції за Гейне і основних властивостей збіжних послідовностей, наведених вище.

Покажемо, що означення границі по Коші (в термінах « ε, δ ») і по Гейне (в термінах збіжних послідовностей) еквівалентні. Нехай число A є границя f(x) у точці x_0 за першим означенням, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Вибираємо збіжну до x_0 послідовність (x_n), тобто для

$\delta(\varepsilon) > 0$ існує $N(\delta)$, що для будь-якого $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$. Але при виконанні останньої нерівності виконується умова $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, тобто послідовність $f(x_n)$ має границю – число A. Маємо: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = A$.

Доведемо тепер обернене твердження: якщо число A є границею функції y = f(x) у точці x_0 за другим означенням, то A є границею f(x) за першим означенням.

Доведення проведемо методом від супротивного.

Припустимо, що A не є границею функції f(x) за першим

означенням. Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при будь якому $\delta > 0$ знайдеться хоча б одне число x_1 із окола точки x_0, що при виконанні умови $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ нерівність $|f(x_1) - A| < \varepsilon_0$ все таки не виконується, тобто виконується нерівність $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Візьмемо послідовність чисел $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,..., $\delta_n > 0$,... яка збігається до нуля, наприклад, послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Тоді для кожного значення δ_n існуватимуть відповідно точ-

ки x_n, які задовольняють нерівності $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, але виконується умова $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$. Легко бачити, що із нерівності $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, яка виконується для всіх n, $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=x_0\ (x_n\neq x_0)$. Отже, згідно з другим означенням границі $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=A$ починаючи з деякого номера повинна виконуватись нерівність $|f(x_n)-A|<\varepsilon_0$, що суперечить умові $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$. Отже, наше припущення, що число А не є границею функції f(x) за першим означенням не вірне. Число А буде границею функції f(x) за першим означенням

Односторонні границі

У означенні границі функції вважається, що *x* прямує до x_0 будь-яким способом: може бути меншим від x_0, більшим від нього, або коливатись навколо точки x_0. Але бувають випадки, коли спосіб наближення аргументу *x* до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому вводять поняття односторонніх границь.

Означення. *Число a називається границею функції f(x) в точці x_0 зліва, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\partial(\varepsilon)>0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність $0<x_0-x<\partial(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$.*

Твердження про те, що a - границя функції f(x) у точці x_0 зліва можна записати так: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=a$.

Означення. *Число a називається границею функції f(x) в точці x_0 справа, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\partial(\varepsilon)>0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність $0<x-x_0<\partial(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$.*

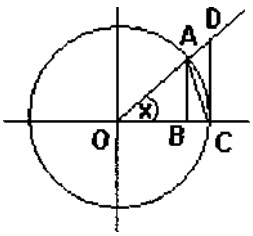
Твердження про те, що a - границя функції f(x) у точці x_0 справа можна записати так: $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=a$.

Лекція 4.

Теорема (Перша чудова границя)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доведення. Нехай x > 0 . Розглянемо x поблизу нуля, тому припустимо, що $0<x<\frac{\pi}{2}$. Зробимо рисунок. Візьмемо коло з центром у довільній точці O і радіусом R .



Відкладемо кут $\angle$AOC, радіанна міра якого x. Маємо:

$S_\Delta OAC<S_{сектора}OAC<S_\Delta ODC$, де

$S_\Delta OAC=\frac{1}{2}R^2\sin x;\quad S_{сект}OAC=\frac{1}{2}R^2x;\ S_\Delta ODC=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot DC=\frac{1}{2}R^2tg(x)$, тоді

$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 tg(x), \qquad \sin(x) < x < tg(x)$.

Поділимо подвійну нерівність на sin x (sin x > 0) ,

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, або $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$; тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; (x> 0) .

Розглянемо випадок, коли x < 0 . Введемо нову змінну t = -x ,

де t > 0 . Тоді $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Повертаючись до змінної x , одержимо

1 = $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$, де x < 0.

Таким чином незалежно від знака x виконується умова

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Дана границя називається першою чудовою (інколи її називають важливою) границею.

Зауваження. Нехай маємо функцію y(x), для якої $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin g(x)}{g(x)} = 1$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5}{5x\cdot\cos x} =$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 5\cdot 1\cdot 1 = 5$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Друга чудова границя.

Теорема $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли x >0. Оскільки $x \to 0$,то вважатимемо, що 0 < x < 1. Згідно аксіоми Архімеда маємо

$n \le \frac{1}{x} < n+1$, або $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$

Тоді виконуються такі нерівності

$1+\frac{1}{n+1} < 1+x \le 1+\frac{1}{n}$

Внаслідок того, що $n \le \frac{1}{x} < n+1$, можна записати такі нерівності:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Тоді $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Якщо $x \to 0$, то $n \to \infty$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

тоді границя $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ існує і $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Розглянемо випадок, коли x < 0. Зробимо заміну

$1+x = \frac{1}{1+t}$. Тоді $x = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$.

Видно, якщо x < 0, то t > 0. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{-t}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1+t}{t}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}+1} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t) = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \lim_{t\to 0}(1+t) = e \cdot 1 = e$$

Тоді незалежно від знака x маємо $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Наслідок. Якщо зробити заміну $x = \frac{1}{y}$, тоді при

$x \to 0+$ $y \to \infty$, маємо:

$\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$

Наслідок. Нехай маємо функцію g(x), для якої

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

Тоді $\lim_{x\to 0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$

Приклад. Знайти $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \left\{1^{\infty}\right\} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{isnx}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{1} = e$$

Маємо $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення границі функції.
2. Що таке границя функції зліва?
3. Що таке границя функції справа?
4. Як виглядає перша важлива границя?
5. Як виглядає друга важлива границя?

Домашнє завдання: [3], с. 175…177
[6], с.205
[1], с.49

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Похідна функції. Правила диференціювання**

Мета заняття Повторити, узагальнити й систематизувати знання про похідну функції, правилами та формулами диференціювання, сформувати вміння використовувати набуті раніше знання для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 217…221 [1] с.191	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Похідна функції

Для того, щоб краще зрозуміти зміст похідної, розглянемо задачу про знаходження швидкості матеріальної точки, яка вільно падає з деякої висоти (опором повітря знехтуємо). Якщо час t (сек.) відраховується від початку падіння, то пройдений за цей час шлях S (м) знаходиться, як відомо, за формулою :

$$S = \frac{g}{2}t^2,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Для знаходження швидкості в момент часу t дамо змінній t деякий приріст Δt. За час Δt точка проходить відстань $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(2t\cdot \Delta t + \Delta t^2)$.

Знаходимо середню швидкість точки:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}\ \frac{2t\cdot \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = g(t + \frac{\Delta t}{2}).$$

Бачимо, що середня швидкість, яка характеризує швидкість в момент часу t, залежить від Δt. Для того, щоб більш точно виразити шукану швидкість за допомогою середньої швидкості, потрібно брати менший проміжок часу Δt. Очевидно, найбільш повно характеризує швидкість руху точки в момент часу t та границя, до якої прямує середня швидкість $\Delta t \to 0$. Цю границю називають швидкістю нерівномірного руху матеріальної точки в момент часу t, тобто

$$V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Таким чином ми бачимо, що існують задачі, розв'язок яких пов’язаний з знаходженням границь відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля. Такі задачі приводять до основного поняття диференціального числення – до поняття похідної.

Визначення похідної:

Нехай маємо функцію y = f(x), яка визначена на деякому інтервалі (при кожному значенні аргументу x із цього інтервалу функція y = f(x) має визначене значення). Нехай аргумент x одержав деякий (додатний чи від'ємний, несуттєво) приріст Δx. При цьому значення $x+\Delta x$ також належить даному інтервалу.

Приріст функції при цьому становить

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx.

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Означення. *Якщо границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, існує то її називають похідною функції в точці x і позначають y′(x), тобто*

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку для кожного значення x похідна y′(x) має визначене значення, тобто похідна є також функцією від x.

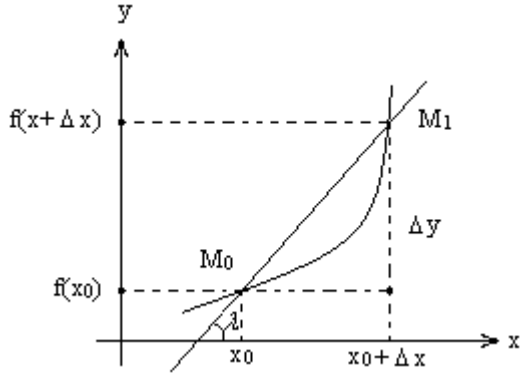
Поряд з позначенням y′(x) або f′(x) (позначення згідно Лагранжа), використовують інші позначення $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df}{dx}$ (позначення згідно Лейбніца) та Dy або Df(x). (Позначення згідно Коші).

Зауважимо, що позначення $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df}{dx}$ зараз приймаються, як цільні символи, пізніше покажемо, що їх можна розглядати як дріб – відношення диференціалу dy (або df(x)) функції до диференціалу dx аргументу.

Операція знаходження похідної від функції f(x) називається диференціюванням цієї функції.

Геометричне тлумачення похідної.

Розглянемо графік деякої функції f(x) в прямокутній системі координат:



При деякому значенні x_0 функція має значення $f(x_0)$. Дамо аргументу приріст Δx. Новому значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ відповідає значення функції $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$. Проведемо січну M_1M_0 і позначимо через λ кут, утворений січною з віссю Ox. З малюнка бачимо, що

$$tg\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то січна M_1M_0 буде повертатись навколо точки M_0 і наближатися до дотичної. При цьому:

$$\operatorname{tg}\lambda_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Висновок: *значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0.*

При цьому рівняння дотичної має вигляд:

$$\gamma = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Оскільки нормаль і дотична взаємно перпендикулярні прямі (добуток їх коефіцієнтів кутового нахилу дорівнює „-1”), рівняння нормалі до графіка функції в точці x_0 має вид

$$\gamma = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Означення. *Якщо функція $y=f(x)$ має похідну в точці x, то вона називається диференційованою в цій точці.*

Якщо функція диференційована в кожній точці деякого відрізку [a;b] (інтервалу (a;b)), то вона називається диференційованою на відрізок [a;b] (інтервалі (a;b)).

Приклад обчислення похідної.

Для прикладу обчислення похідної згідно означення знайдемо похідну функції y=sinx. Маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos\Delta x + \cos\Delta x \cdot \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x(1 - \cos\Delta x) + \cos x \cdot \sin\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\sin x \cdot 2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-\sin x \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} + \cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \cdot$$

$$y' = \cos x.$$

Односторонні похідні.

Перейдемо до розгляду так званих односторонніх похідних.

Нехай Δx наближається до нуля праворуч, тобто $\Delta x \to 0$, але $\Delta x > 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x>0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x>0)}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають правосторонньою похідною в точці x_0 і позначають

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0+0)$$

Аналогічно, якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x<0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x<0)}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають лівосторонньою похідною в точці x_0 і позначають $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0-0)$.

Зауваження 1. Якщо функція f(x) задана на відрізку [a;b], то під похідною в точці „a" розуміють правосторонню похідну, а в точці „b" – лівосторонню.

Зауваження 2. Якщо у внутрішній точці $x_0 \in (a;b)$ функція f(x) має похідну, то в цій точці f(x) має односторонні (правосторонню і лівосторонню) похідні, які дорівнюють похідній у цій точці.

Означення. *Якщо в точці* $x_0 \in (a;b)$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, *то це невласне число називають нескінченною похідною функції f(x) у точці* x_0.

Аналогічно визначаються односторонні нескінченні похідні.

Лекція 9.

Похідна сталої функції

Нехай маємо сталу функцію $y = C$, *тоді* $y' = 0$

Доведення. Згідно означення маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Таким чином $y' = 0$.

Похідна степеневої функції

Нехай маємо степеневу функцію $y = x^{\varepsilon}$, *тоді* $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

Доведення. Згідно означення маємо ($x \neq 0$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\varepsilon} - 1\right]}{\Delta x} =$$

$$= \left\{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Розглянемо випадок, коли x=0.

Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^{\alpha} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & при\ \alpha \geq 1 \\ не\ існує & при\ \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Таким чином, при $\alpha \geq 1$ $y'(0) = 0$. Такий результат можна одержати по формулі $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, яка одержана з допущенням, що $x \neq 0$. А тому на указане обмеження можна уваги не звертати і використовувати формулу $y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ для всіх значень аргументу із області визначення похідної.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^{10}$

Розв'язування. Маємо

$$y' = 10x^9.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$

Розв'язування. Маємо

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left((x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ тобто } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Похідна показникової функції

Нехай маємо показникову функцію $y = a^x$, *тоді* $y' = a^x \cdot Lna$

Доведення. Згідно означення маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} =$$

$$= \left\{(a^{\Delta x}-1) \sim \Delta x\cdot Lna\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot\Delta x\cdot Lna}{\Delta x} = a^x Lna$$

Таким чином $y' = \left(a^x\right)' = a^x Lna$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = 5^x$

Розв'язування. Маємо

$$y' = 5^x \cdot Ln5.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = e^x$

Розв'язування. Маємо

$y' = e^x \cdot Lne = e^x$ тобто $y' = e^x$.

Похідна логарифмічної функції

Нехай маємо логарифмічну функцію $y = Log_a x$, *тоді* $y' = \frac{1}{x\cdot Lna}$.

Доведення. Розглянемо спочатку функцію $y = Lnx$

Згідно означення маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Ln(x+\Delta x)-Lnx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left\{Ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x}\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot x} = \frac{1}{x} \text{ тобто } y' = \left(Lnx\right)' = \frac{1}{x}$$

Оскільки $y = Log_a x = \frac{Lnx}{Lna}$, то

$$y' = (Log_a x)' = \left(\frac{Lnx}{Lna}\right)' = \frac{1}{Lna}\cdot\left(Lnx\right)' = \frac{1}{x\cdot Lna} \text{ Маємо}$$

$$y' = (Log_a x)' = \frac{1}{x\cdot Lna}$$

Похідні тригонометричних функцій

Похідна y= sinx.

Вище було показано, що $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Нехай маємо функцію $y = \cos x$, *тоді* $y' = -\sin x$

Доведення. Маємо $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ тоді, використовуючи правило диференціювання складної функції, одержимо

$$y' = (\cos x)' = (\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right))' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (0-1) = -\sin x$$

$$y' = (\cos x)' = -\sin x$$

Нехай маємо функцію $y = tg\,x$, *тоді* $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Доведення. Маємо $y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ тоді, використовуючи правило диференціювання відношення функцій, одержимо $y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Нехай маємо функцію $y = ctgx$, *тоді* $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Доведення. Маємо $y = ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ тоді, використовуючи правило диференціювання відношення функцій, одержимо $y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Похідні обернених тригонометричних функцій

Нехай маємо функцію $y = \arcsin x$, *тоді* $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x = \sin y$, тоді

$$x'_y = \cos y$$

Використовуючи правило диференціювання оберненої функції, одержимо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Нехай маємо функцію $y = \arccos x$, *тоді* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x = \cos y$, тоді

$$x'_y = -\sin y$$

Використовуючи правило диференціювання оберненої функції, одержимо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'_x = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Нехай маємо функцію $y = arctgx$, *тоді* $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x = tgy$, тоді

$$x_y^1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Використовуючи правило диференціювання оберненої функції, одержимо

$$y_x^1 = \frac{1}{x_y^1} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+tg^2(arctgx)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y_x^1 = \left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Нехай маємо функцію $y = arcctgx$, *тоді* $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x = ctgy$, тоді

$$x_y^1 = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

Використовуючи правило диференціювання оберненої функції, одержимо

$$y_x^1 = \frac{1}{x_y^1} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+ctg^2 y} = \frac{-1}{1+ctg^2(arcctgx)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$y_x^1 = \left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідні гіперболічних функцій

Нехай маємо гіперболічний синус $y = shx$, *тоді* $y' = chx$

Доведення.

Маємо

$$y' = (shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

Таким чином $y' = (shx)' = chx$.

Нехай маємо гіперболічний косинус $y = chx$, *тоді* $y' = shx$

Доведення.

Маємо

$$y' = (chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

Таким чином $y' = (chx)' = shx$.

Нехай маємо гіперболічний тангенс $y = thx$, *тоді* $y' = \frac{1}{ch^2 x}$

Доведення. Використовуючи правило диференціювання відношення функцій, одержимо

$$y' = (thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)' \cdot chx - shx \cdot (chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}$$ Таким чином $y' = (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$.

Нехай маємо гіперболічний котангенс $y = cthx$, *тоді* $y' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Доведення. Використовуючи правило диференціювання відношення функцій, одержимо

$$y' = (cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)' \cdot shx - chx \cdot (shx)'}{sh^2 x} = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = \frac{-1}{sh^2 x}$$ Таким чином $y' = (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

Одержані результати занесемо у таблицю, яку назвемо таблицею похідних

Таблиця похідних

Функція f(x)	Перша похідна f'(x)
$y = const$	$(C)'=0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln(a)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log a(x)$	$y' = 1/(x \ln(a))$
$y = \ln(x)$	$y' = 1/x$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = tg(x)$	$y' = 1/\cos^2(x)$
$y = ctg(x)$	$y' = -1/\sin^2(x)$
$y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctg(x)$	$y' = 1/(1+x^2)$
$y = arcctg(x)$	$y' = -1/(1+x^2)$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення похідної функції.
2. Назвіть геометричний зміст похідної функції.
3. Назвіть правила диференціювання.
4. Дайте означення диференційованої функції.
5. Назвіть формули диференціювання.

Домашнє завдання: [3], с. 217-221
[1], с.191

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Коло, його рівняння. Еліпс, його рівняння**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям кола, еліпса та їх рівняннями, сформувати вміння знаходити координати вершин, фокусів, ексцентриситет еліпса.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [6] с. 149…151 [3] с. 132…134	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали лекції

Кривими другого порядку називають лінії, які у прямокутній системі координат описуються алгебраїчними рівняннями другого ступеня відносно змінних x, y:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

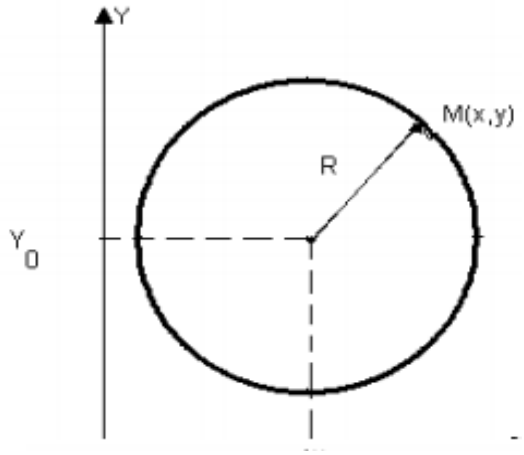
де хоч би один з коефіцієнтів A, B, C є відмінний від нуля.

У залежності від того, які значення приймають коефіцієнти рівняння (1), розрізняють наступні основні види кривих другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Коло – це геометричне місце точок однаково віддалених від даної точки (центра кола).

Для довільної точки $\mathrm{M}(x, y)$ кола, центр якого знаходиться в точці $\mathrm{C}(x_0, y_0)$, відповідно до визначення маємо: $|\mathrm{MC}| = R$, де R - радіус кола.

Або $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Підносячи останню рівність до квадрату, одержимо рівносильне рівняння



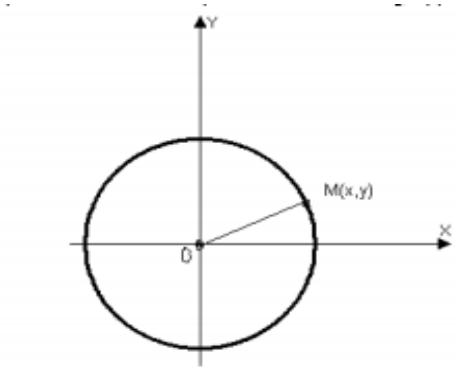
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (2)$$

(1) – рівняння кола з центром у точці $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ радіуса R, або канонічне рівняння кола. Якщо $x_0 = y_0 = 0$, одержуємо рівняння кола з центром у початку координат $x^2 + y^2 = R^2$ (3)

Розкриваючи дужки у рівнянні (2) та перегрупувавши одержаний вираз, маємо:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + ({x_0}^2 + {y_0}^2 - R^2) = 0$$

Порівнявши останнє рівняння з рівнянням (1), одержуємо, що при $A = C = 1, B = 0, D = -2x_0, E = -2y_0, F = {x_0}^2 + {y_0}^2 - R^2$ загальне рівняння (1) описує коло. Тобто рівняння вигляду



$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4)$$

Доцільно вважати загальним рівнянням кола (дійсного або уявного).

Зауваження: можна показати, що рівняння (4) описує дійсну криву (коло), якщо

$$\frac{D^2 + E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \geq 0$$

Висновок: рівняння (1) описує коло тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при квадратах x та y дорівнюють одне одному $(A = C)$ та відсутній елемент, що містить добуток xy

Еліпс – це геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, рівна $2a$ та більша відстані між фокусами.

Для довільної точки $M(x,y)$ еліпса, згідно означення, маємо:

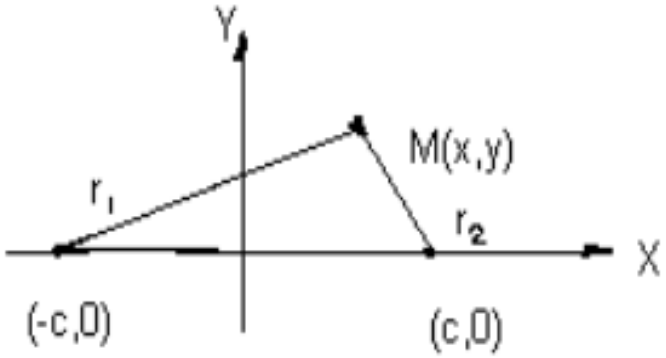
$|F_1M| + |F_2M| = 2a$

де $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ - фокуси (лівий і правий відповідно),

$|F_1M| = r_1$, $|F_2M| = r_2$ - фокальні радіуси, $F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами, $2a$ - стала величина, що характеризує еліпс. Згідно з визначенням, $2a > 2c$.

Тобто маємо: $r_1 + r_2 = 2a$ (5)

Введемо прямокутну декартову систему координат, як показано на рисунку.

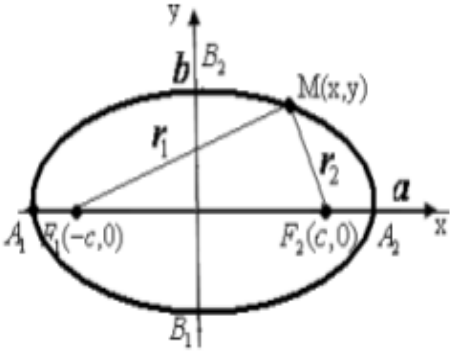


У цьому випадку $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, тому із рівняння (5) маємо $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Після перетворень, пов'язаних з вилученням ірраціональності (при цьому двічі треба використовувати піднесення до квадрату), одержимо:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$ (6)

(6) – канонічне рівняння еліпсу. a - велика піввісь еліпса, b - мала піввісь еліпса.



A_1, A_2, B_1, B_2 - вершини еліпса.

Визначення. Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між фокусами до великої вісі: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$. Можна показати, що ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, звідки видно, що ексцентриситет еліпса характеризує степінь «розтягнутості» еліпса продовж осі $0x$ (чим більше ексцентриситет, тим більше еліпс розтягнут (очевидно, що для еліпса завжди $\varepsilon < 1$))

Перетворюючи (6), одержимо:

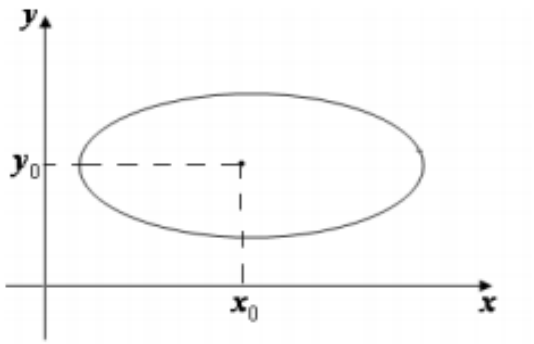
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Висновок: Рівняння (1) описує еліпс з центром у початку координат тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти A та C не дорівнюють одне одному $(A \neq C)$, мають однакові знаки $(AC > 0)$, коефіцієнти $D = E = 0$, а також $B = 0$:

$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ (7)

Зауваження 1: якщо $A > 0$, $C > 0$, а $F < 0$, або $A < 0$, $C < 0$, а $F > 0$, то маємо дійсний еліпс; маємо уявний еліпс, якщо A, C, F мають однакові знаки. Якщо $F = 0$, то рівняння (7) описує точку $O(0;0)$ - вироджений еліпс.

Зауваження 2: якщо $0 < b < a$, то фокуси еліпсу містяться на вісі абсцис, а якщо $0 < a < b$ – фокуси еліпсу переміщуються на вісь ординат.



Зауваження 3: якщо у рівнянні (1) відмінні від нуля хоча б один із коефіцієнтів D або E, маємо еліпс, який одержуємо паралельним перенесенням еліпса (6) таким чином, що його центр попадає у точку з ми $(x_0; y_0)$. Рівняння еліпсу при цьому має вигляд: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (8)

Зауваження 4: якщо у рівнянні (6) $A = C$, то воно описує коло.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення кривої другого порядку.
2. Дайте означення кола.
3. Назвіть рівняння кола з центром у початку координат.
4. Дайте означення еліпса.
5. Назвіть канонічне рівняння еліпсу.

Домашнє завдання: [6], с. 149…151,
[3], с.132…134

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Поняття комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі**.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям комплексного числа, сформувати вміння виконувати дії над комплексними числами у алгебраїчній формі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4] с. 63…66 [1] с. 342	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с
1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Основні поняття комплексних чисел

На множині дійсних чисел не виконується операція-обчислення квадратного кореня із від ємного числа, тому вводиться поняття уявної одиниці : $\sqrt{-1} = i$,звідси маємо, що $i^2 = -1$

$$i^n = \begin{cases} i, якщо_n_ділеться_на_4_з_остачею_1 \\ -1, якщо_n_ділеться_на_4_з_остачею_2 \\ -i, якщо_n_ділеться_на_4_з_остачею_3 \\ 1, якщо_n_ділеться_на_4_без_остачі__ \end{cases}$$

На основі цього вводиться поняття комплексних чисел.

Комплексним числом називається вираз $z = a + bi$, де a і b - дійсні числа, i - уявна одиниця.

Число a називають *дійсною* частиною числа z і позначають $a = \operatorname{Re} z$.

Число b називають *уявною* частиною числа z і позначають $b = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа називаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні та уявні частини: $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_1 = z_2$, якщо $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Два комплексних числа називаються *протилежними*, якщо протилежні їх дійсні та уявні частини: $z_1 = -a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 - b_2 i$.

Два комплексних числа називаються *комплексно спряженими*, якщо рівні їх дійсні частини, а уявні протилежні: $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_1 = a_1 - b_1 i$

Комплексне число *дорівнює нулю* тоді і тільки тоді, коли дійсні та уявні частини дорівнюють нулю : $a + bi = 0$,то $a = 0$ і $b = 0$.

Комплексне число називається *уявним* ,якщо його дійсна частина дорівнює нулю: $z = bi$,якщо $a = 0$.

Геометрична інтерпретація

Геометрично комплексне число $z = a + bi$ зображають у площині Oxy точкою з координатами x і y ,причому між множиною всіх точок площини існує взаємно однозначна відповідність. Площину, точки якої зображають комплексні числа,називають *комплексною площиною* Z .

При цьому дійсним числам відповідають точки , розміщені на ординат (осі Oy). Тому вісь Ox називають *дійсною віссю,* вісь

Oy - *уявною віссю*.

Комплексне число $z = a + bi$ можна також зображати вектором, початок якого міститься у точці $O(0;0)$, а кінець –у точці $A(a;b)$

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ (позначення $|z|$) називають довжину вектора OA,тобто $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Із геометричної інтерпретації випливають наступні властивості:

1.Довжина вектора $\vec{z}$ дорівнює $|z|$.

2.Точки $z = a + bi$ і $z = a - bi$ симетричні відносно дійсної вісі.

3. Точки $z = a + bi$ і $-z = -a - bi$ симетричні відносно точки $z = 0$.
4. Число $z_1 + z_2$ геометрично зображується як вектор,побудований за правилом додавання векторів,відповідних точок z_1 і z_1
5. Відстань між точками z_1 і z_2 дорівнює $|z_1 - z_2|$. (рис.2)

Аргумент комплексного числа

Аргументом числа $z = a + bi$ називають кут, на який треба повернути навколо початку координат частину дійсної осі до збігу з вектором OA : $\varphi = Argz$(так позначається).При цьому кут φ вважають додатним,якщо обертання додатної частини дійсної осі відбувається проти ходу годинникової стрілки,і від ємним- у протилежному напрямі.
Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не визначений. Якщо $z \neq 0$, то $Argz$ визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданка $2\pi k$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$). Одне і тільки одне значення φ аргументу z належить проміжку $(-\pi; \pi]$,його називають *головним значенням* і позначають $\arg z$: $Argz = \arg z + 2\pi k$.
Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ записується так

$\varphi = \arg z$ або $\varphi = \arg(a + bi)$

Із означення тригонометричних функцій витікає, що

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Щоб знайти аргумент числа $z = a + bi$ треба:

1.Визначити в якій чверті знаходиться точка $z = a + bi$.

2.Знайти в цій чверті кут φ ,розв язавши рівняння $tg\varphi = \frac{b}{a}$

3. Знайти всі значення аргументу за формулою $Argz = \varphi + 2\pi k$

Для обчислення головного значення аргументу використовують

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg(b/a), якщо_a > 0 \\ arctg(b/a) + \pi, якщо_a < 0, b \geq 0 \\ arctg(b/a) - \pi, якщо_a < 0, b < 0 \\ \pi/2, ящо_a = 0, b > 0 \\ -\pi/2, якщо_a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Алгебраїчна форма комплексного числа

Форму запису комплексного числа $z = a + bi$ називають алгебраїчною.
Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ в алгебраїчній формі виконують за такими правилами:
1. Додавання $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

2. Віднімання $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

3. Множення $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

4. Ділення ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

де $\bar{z}_2 = a_2 - b_2 i$ - комплексно спряжене число до числа $z_2 = a_2 + b_2 i$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Яку форму комплексного числа називають алгебраїчною?
3. Що таке аргумент комплексного числа?
4. Дайте означення комплексно спряженого числа.
5. Коли комплексне число дорівнює нулю?

Домашнє завдання: [4] с. 63…66
[1] с.342

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Первісна та інтеграл.**

Мета заняття повторити, узагальнити й систематизувати знання студентів про первісну та інтеграл, сформувати вміння знаходити первісну функції та обчислювати визначений та невизначений інтеграли.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1] с. 321 [4] с. 77…79 [2] с.79	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с
4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Поняття первісної та невизначеного інтегралу

Згадаємо приклад із механіки. Якщо у початковий момент часу $t = 0$ швидкість тіла дорівнює 0, тобто $v(0) = 0$, то при вільному падінні тіла до моменту часу t пройде шлях $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ (1). Формула (1) була отримана Галілеєм за допомогою експерименту.

Диференціюванням знаходимо швидкість: $s'(t) = v(t) = gt.$

Друге диференціювання дає швидкість: $v'(t) = a(t) = g$, тобто прискорення стале.

Більш типово для механіки інше положення: відомо прискорення точки $a(t)$ (в нашому випадку воно стале), треба знайти закон зміни швидкості $v(t)$, а також знайти координату $s(t)$. Іншими словами, за заданою похідною $v'(t)$, яка дорівнює $a(t)$, треба знайти $v(t)$, а потім за похідною $s'(t)$, яка дорівнює $v(t)$, знайти $s(t)$.

Для розв'язування таких задач служить операція інтегрування, обернена операції диференціювання.

Функція F називається *первісною для функції f* на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Приклад . Функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є первісною для функції $f(x) = x^2$ на проміжку $(-\infty; \infty)$, так як $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$ для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

Ознака сталості функції. Якщо $F'(x) = 0$ на деякому проміжку I, то функція F - стала на цьому проміжку.

Теорема. Довільна первісна для функції f на проміжку I може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де $F(x)$ - одна із первісних для функції $f(x)$ на проміжку I, а C - довільна стала.

Таблиця первісних.

Функція	k (стала)	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$sinx$	$cosx$	$\frac{1}{cos^2 x}$	$\frac{1}{sin^2 x}$	$\frac{1}{x}$
Первісна	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-cosx + C$	$sinx + C$	$tgx + C$	$-ctgx + C$	$ln\|x\| + C$

Правила знаходження первісних.

Правило 1. Якщо F є первісною для f, а G - первісна для g, то $F + G$ є первісною для $f + g$.

Правило 2. Якщо F є первісною для f, а k - стала, то функція kF - первісна для kf.

Правило 3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b - сталі, причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною для $f(kx + b)$.

Приклад 1. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$.

Так як для x^3 одною із первісних є $\frac{x^4}{4}$, а для $\frac{1}{x^2}$ одною із первісних є $-\frac{1}{x}$, за правилом 1 знаходимо: одною із первісних для функції $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ буде $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$.

Відповідь: $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$.

Приклад 2. Знайти одну із первісних для функції $f(x) = 5\,cosx$.
Так як для $cosx$ одною із первісних є $sinx$, користуючись правилом 2, отримаємо відповідь: $F(x) = 5sinx + C$.

Приклад 3. Знайти одну із первісних для функції $f(x) = sin(3x - 2)$.
Для $sinx$ одною із первісних є $-cosx$, тому за правилом 3 шукана первісна
$F(x) = -\frac{1}{3}cos(3x - 2)$

Приклад 4. Знайти одну із первісних для функції $f(x) = \frac{1}{(7-3x)^5}$.
Так як для $\frac{1}{x^5}$ первісною є $-\frac{1}{4x^4}$, за правилом 3 шукана первісна дорівнює
$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{4(7-3x)^4} = \frac{1}{12(7-3x)^4}$.

Функцію F(x) називають *первісною* функції f(x) на проміжку (a,b), якщоF(x) диференційована на (a,b) і виконується рівність $F(x)' = f(x), x \in (a,b)$

Сукупність усіх первісних F(x) +C, $C \in R$ функції f(x) на (a,b) називається *невизначеним інтегралом* функції f(x) і позначається так: $\int f(x)dx = F(x) + C$
Термін «інтеграл» походить від латинського слова integralis – цілісний.
Властивості невизначеного інтегралу:

1.$(\int f(x)dx)' = f(x)$
2.$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3.$\int dF(x) = F(x) + c$
4. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \lambda = const$
5.$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
6.Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$, зокрема $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Операція відшукання невизначеного інтегралу від функції називається інтегруванням цієї функції.

Таблиця основних інтегралів

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними. Мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного. Внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко відшукуються на основі табличного.

Нехай $u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справджуються такі формули, що зведені у таблиці:

Інтеграл		Первісна	Інтеграл		Первісна
1	$\int 0dx$	C	9	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$
2	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$
4	$\int e^x dx$	e^x + C	12	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
5	$\int \sin x dx$	-cosx + C	13	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
6	$\int \cos x dx$	sinx + C	14	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
7	$\int tgx dx$	-ln $\|$ cosx $\|$ +C	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
8	$\int ctgx dx$	ln $\|$ sinx $\|$ + C			

Основні методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування.
2. Метод підстановки (заміни змінної)
3. Метод інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування базується на використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності інтеграла та інваріантності формул інтегрування.

Приклади розв'язання типових задач

I.Знайти інтеграли, використовуючи метод безпосереднього інтегрування.

1. $\int \left(2x^3 + \frac{1}{x} - 1\right) dx = 2\int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int dx = 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1\right) + \ln|x| + C_2 - x + C_3 = \frac{x^4}{2} + \ln|x| - -x + C$. При кожному інтегруванні виникають проміжні довільні сталі: C_1, C_2, C_3 але тоді 2 C_1 + C_2 + C_3 – також є довільною сталою. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих.

2. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx - \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\ |x + \sqrt{1+x^2}\,| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} arcsin\frac{2x}{3} + C$

5. $\int \frac{dx}{1+cos2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{2} tgx + C$

6. $\int \frac{dx}{sin^2 x cos^2 x} = \int \frac{(sin^2 x + cos^2 x)dx}{cos^2 x sin^2 x} = \int \frac{dx}{cos^2 x} + \int \frac{dx}{sin^2 x} = tgx - ctgx + C$

7. $\int \frac{4^x - 4}{2^x + 2} dx = \int \frac{(2^x - 2)(2^x + 2)}{2^x + 2} dx = \int (2^x - 2)dx = \frac{2^x}{ln2} - 2x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9} + x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(\frac{1}{3})^2 + x^2} = \frac{1}{3} arctg3x + C$

9. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - arctgx + C$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення первісної функції.
2. Назвіть властивості первісних.
3. Дайте означення невизначеного інтегралу.
4. Назвіть таблицю первісних.
5. Які методи інтегрування вам відомі?

Домашнє завдання: [1] с. 321, [4] с. 77…79, [2] с.79

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Основні поняття функції кількох змінних.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям функції кількох змінних, сформувати вміння обчислювати границю функції кількох змінних.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1] с. 6…8	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Нехай задано множину *D* упорядкованих пар чисел *(x, y)*. Якщо кожній парі чисел *(x, y)* $\in D$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине дійсне число z, то кажуть, що на множині *D* визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z = f(x, y)$.

При цьому змінну z називають залежною змінною (функцією), а x та y — незалежними змінними (*аргументами*).

Множину пар *(x, y)* для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення (існування) цієї функції і позначають , *D (f)* або D.

Множину значень z позначають , *E(f)* або *E.*

Кожній упорядкованій парі чисел *(x, y)*. у прямокутній декартовій системі координат взаємно однозначно відповідає точка M(x,y) площини Oxy. Тому функцію $z = f(x, y)$можна розглядати як функцію точки M(x,y)і писати $z = f(M)$

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають так: $z_0 = f(x_0, y_0)$, або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|M_0$.

Областю визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$ деяка множина точок координатної площини R^2(площиниOxy).

Будь-який упорядкований набір m дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ють$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, або $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, і називають точкою m - вимірного координатного просторуR^m. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називають координатами точки *M.*

ПростірR^1— це множина всіх дійсних чисел, тобто координатна пряма;R^2— множина усіх дійсних пар(x,y), тобто координатна площина; 3R — множина всіх дійсних трійок (x,y,z), тобто координатний простір. Відстань між точками $M(x_1, x_2, \ldots, x_m) i\ M_0(x_1^0;\ x_2^0; \ldots x_m^0)$визначають за формулою

$$p(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_m x_m^0)^2}.$$

Множину всіх точок M, координати яких задовольняють нерівність $P(M, M_0) < \varepsilon$, називають ε— околом точки M_0. Так, ε— окіл точки $M_0(x_0, y_0)$ — множина всіх точок площини, які розміщені всередині кола радіуса ε з центром у точці M_0

Лінію, що обмежує область *D*, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то таку область називають замкненою.

Якщо всі точки області *D* містяться всередині деякої *m*-вимірної кулі, то цю область називають обмеженою.

Область *D* називають зв'язною, якщо дві довільні її точки можна з'єднати неперервною кривою, усі точки якої містяться в області *D.*

Наприклад, круг — це зв'язна область, а об'єднання двох кругів, які не мають спільних точок, — незв'язна область.

Надалі під околом точки *M* будемо розуміти довільну відкриту зв'язну множину, яка містить точку *M*.

Узагальнимо поняття функції на випадок трьох і більше незалежних змінних.

Якщо кожній трійці чисел (x,y,z) ϵD за певним правилом відповідає єдине число *u*, то кажуть, що на множині *D* визначено функцію *u* від трьох змінних *x, y та z* , і записують $u = f(x, y, z)$або $u = f(M)$

Тут *u* — залежна змінна (функція), *а x, y, z* — незалежні змінні (аргументи). Область існування функції $u = f(x, y, z)$= – деяка множина точок простору R^3. Саму функцію геометрично зобразити неможливо.

Наприклад, областю існування функції $u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$ є куля радіуса 2 з центром у початку координат. Цій області не належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ — межі області. Отже, шукана область відкрита. Множиною значень даної функції є проміжок $(-\infty; \ln 4]$.

Якщо кожній точці $M(x_1;\ x_2; \dots \dots x_m)$ із області *D* ставиться за певним правилом у відповідність деяке число *u*, то кажуть, що на множині *D* визначено функцію *m* змінних, і пишуть $u = (x_1;\ x_2; \dots \dots x_m)$ або $u = f(M)$.

1.1. Границя функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області *D* і точка M_0 — гранична точка області *D*, тобто точка $M_0 \in D$ або $M_0\ D$, але в довільному околі цієї точки міститься принаймні одна точка множини *D*, відмінна від точки M_0

Число *b* називають границею функції *f(M)* у скінченній точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного як завгодно малого числа *ε>0* існує таке число δ>0 що для всіх точок *M(x,y)* , які задовольняють умову $0 < p(M_0, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - b| < \varepsilon.$

При цьому пишуть: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$, або $\lim_{M \to M_0} f(M) = b$

Слід пам'ятати, що границя функції, якщо вона існує, не залежить від шляху наближення до точки, в якій ця границя шукається. Інакше границя не існує. *Для доведення неіснування границі функції кількох змінних*

Обчислення границь у багатьох випадках доцільно виконувати у такій послідовності:

1. Перенести початок координат у точку $M_0(x_0, y_0)$ (якщо не всі координати точки M_0дорівнюють нулю). Так, якщо$x_0 \neq 0$, виконують заміну

$$t = \begin{cases} x - x_0, & якщо\ x_0 \neq 0, x_{0 \neq \infty} \\ \dfrac{1}{x}, & якщо, x_{0=\infty} \end{cases}$$

Наприклад, якщо $M(x, y \to M_0(2; \infty)$, то після заміни $t_1 = x - 2$, $t_2 = 1/y$ дістанемо $M(t_1 t_2) \to M_0(0; 0)$.

2. Інколи необхідно перейти до полярних координат із полюсом у точці $M_0(y_0, y_{0)}$ і полярною віссю, напрям якої збігається з додатним напрямом осі абсцис, тоді перехід від прямокутних декартових координат (x,y) до полярних координат (p, ϕ) (рис. 1.1) здійснюється за формулами:

$$x - x_0 = p\ cos\varphi, y - y_0 = \varphi,$$

$$p = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, 0 \leq p < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Отже, задача відшукання границі $\lim_{M \to M_0} f(M)$

зводиться до обчислення границі $\lim_{p \to 0} f(M)$, де ρ є однією з координат точки *M,* а інша координата (кут φ) вважається довільною. При цьому казати про існування границі можна тільки тоді, коли існує та сама границя при $p \to 0$при будь-яких залежностях $\varphi = \varphi(p), \theta = \theta(p)$

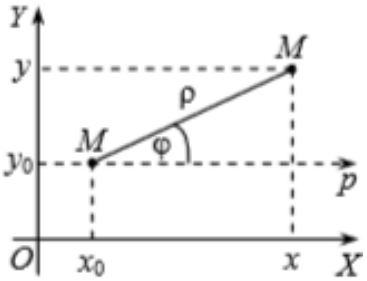


Рис. 1.1

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення функції кількох змінних.
2. Назвіть область визначення функції багатьох змінних.
3. Дайте означення границі функції.

Домашнє завдання: [4] с. 6…8

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Рівняння з відокремлюваними змінними.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям диференціального рівняння, розв'язку диференціального рівняння, порядку диференціального рівняння , сформувати вміння визначати тип рівняння і знаходити його загальний і частинний розв'язки.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1] с. 427 [4] с. 201…204	10 хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Рівняння, яке зв'язує між собою незалежну змінну , шукану функцію та її похідні або диференціали різних порядків, називається *диференціальним рівнянням*.

Якщо шукана функція є функцією лише однієї змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*; якщо ж незалежних змінних дві або більше, то – *рівнянням з частинними похідними.*

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, яка входить в це рівняння. Наприклад, рівняння $\mathrm{y}'\sin\mathrm{x}+\mathrm{y}tq\mathrm{x}=1$ - рівняння першого порядку; $\mathrm{y}''=\mathrm{x}^3$- рівняння другого порядку і т.д.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x,y,y')=0, \qquad (1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y=y(x)$ та її похідну y'. Рівняння (1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння вигляду $y'=f(x,y)$ (2)

називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням у нормальній формі.

Функція $\mathrm{y}=\varphi(\mathrm{x})$, яка задовольняє диференціальному рівнянню, називається *розв'язком* цього рівняння. Графік розв'язку називається *інтегральною кривою* рівняння.

Теорема *(про існування і єдиність розв'язку)* Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0,y_0)\in \mathrm{G}$. Тоді існує єдиний розв'язок $\mathrm{y}=\varphi(\mathrm{x})$ рівняння $y'=f(x,y)$, який задовольняє умову $\varphi_0(\mathrm{x})=y_0$.

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0,y_0)\in \mathrm{G}$ проходить єдина інтегральна крива.

Задачу відшукання розв'язку $\mathrm{y}=\varphi(\mathrm{x})$ рівняння (2), який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$, називають *задачею Коші.* З погляду геометрії розв'язати задачу Коші – означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку (x_0,y_0).

Розв'язок диференціального рівняння, яке містить стільки незалежних змінних, який порядок рівняння, називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

Функції, які отримують із загального розв'язку при різних значеннях довільних сталих, називають *частинними розв'язками* цього рівняння. Для знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння задають *початкові умови*.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком*. Особливий розв'язок неможливо визначити із загального при жодному значенні сталої С.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння з розділяючимися змінними має вигляд

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Для його розв'язання розділяємо змінні:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Загальний інтеграл рівняння знаходиться інтегруванням:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = \mathrm{C}$$

Диференціальне рівняння з розділяючимися змінними записують ще у вигляді:

$$\mathrm{y}' = f(x)q(y)$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення диференціального рівняння.
2. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
3. Що таке порядок диференціального рівняння?
4. Назвіть загальний вигляд рівняння з відокремлюваними змінними.

Домашнє завдання: [1] с. 427, [4] с. 201…204

Лекція

з навчальної дисципліни *Вища математика*

Тема **Лінійні диференціальні рівняння 1 порядку. Метод варіації довільної сталої. Метод Бернулі.**

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям лінійного диференціального рівняння, сформувати вміння визначати тип рівняння і знаходити його загальний і частинний розв'язки методом варіації довільної сталої та методом Бернулі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: *привітання, визначення присутності студентів на занятті*
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми*
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється *викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1] с. 433 [4] с. 205…207	10 хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого на лекції матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Рівняння вигляду: $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$ (1)

називається *лінійним рівнянням першого порядку*.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називають *лінійним неоднорідним*; якщо $Q(x) = 0$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \qquad (2)$$

і називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку.*

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція y(x) і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Рівняння (2) одночасно є рівнянням з розділяючимися змінними. Знайдемо його розв'язок :

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y; \quad \frac{dy}{y} = -P(x) \cdot dx; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x) \cdot dx;$$
$$ln|y| = -\int P(x) \cdot dx + lnC,$$

звідси

$$y = Ce^{-\int P(x) \cdot dx}.$$

Для розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь застосовують *метод Бернуллі* або *метод варіації довільної сталої*.

Метод Бернуллі. Розв'язок нелінійного рівняння (1) шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій u(x) і v(x), тобто y(x) = u(x) · v(x).

Після цього рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + P(x)v\right] = Q(x) \quad (3)$$

Користуючись тим, що одна із допоміжних змінних, наприклад v, обрана довільно, підберемо її так, щоб вираз у квадратних дужках обертався в нуль, тобто в якості v візьмемо один із частинних розв'язків $v = v(x)$ рівняння з розділяючимися змінними

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Підставивши вираз $v = v(x)$ у рівняння (3), отримаємо рівняння відносно функції u:

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Це також рівняння з розділяючимися змінними. Відшукав загальний розв'язок цього рівняння $u = u(x, C)$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1):

$$y = u(x, C)v(x) .$$

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Розв'язок рівняння (1) шукають у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x) \cdot dx}. \qquad (4)$$

При фіксованому значенні C цією формулою задається розв'язок лінійного однорідного рівняння (2). Підставивши (4) у (1), дістанемо рівняння

$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x) \cdot dx}$. Звідси

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x) \cdot dx}dx + C_1,$$

де C_1- довільна стала. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) задається формулою

$$y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\cdot dx}dx + \mathrm{C}_1\right]$$

Зауваження.

Деякі рівняння будуть лінійними, якщо за невідому функцію розглянути змінну *x*, а за незалежну – змінну *y*, тобто рівняння вигляду $\mathrm{x}' + P(\mathrm{y})\cdot \mathrm{x} = Q(\mathrm{y})$

Рівняння Бернуллі має вигляд $\mathrm{y}' + P(\mathrm{x})\cdot \mathrm{y} = Q(\mathrm{x})\mathrm{y}^{\mathrm{к}}$, де к – дійсне число (к≠0;1). При к=0 і к=1 дане рівняння є лінійним.

Заміною $z = y^{1-k}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Або ж шукають його розв'язок у вигляді $y = u(\mathrm{x})\cdot\ v(\mathrm{x})$.

Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Розв'язання: Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі: $y = u(x)v(x),\ y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x},\quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}\ ,\quad v' + \frac{v}{x} = 0\ ,\ \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}\ ,\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}\ ,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}\ ,\quad ln|v| = -ln|x| + ln|\mathrm{C}|,\quad v = \frac{\mathrm{C}}{x}\ ,\ \mathrm{C} = 1,\ \ v = \frac{1}{x}\ .$$

Повертаємось до рівняння з дужками (вираз в дужках дорівнює нулю):

$$u'v = \frac{\sin x}{x}\ ,\quad u'\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x},\quad u' = \sin x\ ,\quad u = -\cos x + \mathrm{C}_1.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + \mathrm{C}_1)$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення лінійного диференціального рівняння.
2. В чому полягає метод варіації довільної сталої.
3. Як розв'язати лінійне рівняння методом Бернуллі?
4. Назвіть загальний вигляд лінійного рівняння.

Домашнє завдання: [1] с. 433, [4] с. 205…207